UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA Y CIENCIAS SOCIALES

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ECONÓMICA

SEGUNDO TRABAJO DE ÁLGEBRA LINEAL

---

1. Probar usando las propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x(x^2-1) \\ 1 & y & y(y^2-1) \\ 1 & z & z(z^2-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+z & x & yz \\ x+z & y & xz \\ x+y & z & xy \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$

2. Analice Ud. Las siguientes proposiciones y justifique su respuesta.

a)Si se intercambian dos líneas cualesquiera de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

b)Se cumple que:

det A=(det B)(detC) siendo las matrices A, B,C y D cuadradas, además $A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$

c)Si las matrices A y B son simétricas y conmutan ,entonces $A^{-1}B$, AB^{-1} **y** $A^{-1}B^{-1}$ son simétricas**.**

3. Si : A= $\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ a & 1 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ donde $a \neq 0$ y B = $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Expresar M = $(I-A)(I+A)^{-1}(I-A)^{-1}(I+A)B$ como un producto de matrices elementales fila.

4. Probar usando las propiedades (sin desarrollar los determinantes) de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & xy & 2x \\ x & 2 & y \\ x^2 & 4 & y^2 \end{vmatrix}$.

5. Calcular el valor de K, sabiendo que se cumple

$$\left|\begin{bmatrix} 4x_1+y_1 & 4x_2+y_2 & 4x_3+y_3 & 4x_4+y_4 \\ 4y_1+z_1 & 4y_2+z_2 & 4y_3+z_3 & 4y_4+z_4 \\ 4z_1+w_1 & 4z_2+w_2 & 4z_3+w_3 & 4z_4+w_4 \\ 4w_1+x_1 & 4w_2+x_2 & 4w_3+x_3 & 4w_4+x_4 \end{bmatrix}\right| = K\left|\begin{bmatrix} x1 & x2 & x3 & x4 \\ y1 & y2 & y3 & y4 \\ z1 & z2 & z3 & z4 \\ w1 & w2 & w3 & w4 \end{bmatrix}\right|$$

6. Calcular los valores de x que hacen cero el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \textbf{ con } a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ .}$$

7. Sea $A=\begin{bmatrix} c & 0 & a \\ b & a & c \\ c & -1 & -3 \end{bmatrix}$ donde a > 0, b y c enteros, det a<0

adj(A)= $\begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$ y $\left| \text{adj} \left(\frac{1}{4} A^{-1} \right) \right| = 16^{-3}$

Calcular $(2A - A^{-1})^{-1}$ si es que existe.

8. Sea A= $[a i\, j]$ una matriz simétrica de orden 3 con determinante negativo donde $a_{11} = 2;\ a_{13} = b \ y \ a_{33} = 1$

Adj A= $\begin{bmatrix} -9 & a & 3 \\ \bullet & -7 & \bullet \\ \bullet & b & -1 \end{bmatrix}$ donde a<0, a+3b=1.

Calcular $\frac{1}{81}$ adj (adj (3 A)

9. Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -2 & a \end{bmatrix}$$

a) Determinar la suma de los elementos de A^{-1}

b) Los valores que debe toma “a” para que A y A^{-1} tomen el mismo valor.

c) Expresar A^{-1} como un producto de matrices elementales.

10. Dadas las matrices A,B, C orden 3 si AC=B tal que

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Exprese la matriz C y C^{-1} como un producto de matrices elementales.

11. Dadas las matrices:

$$A^{-1} = F_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)F_{21}(-2)F_{13}(-3)F_{21}(-\alpha)F_{12}(\alpha), \quad \text{donde} \quad |A| = 1 \quad \text{y}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2b+3 & -b+1 & -b-1 \\ 3b-3 & -2b & -3b-2 \\ b+2 & -1 & -2b-1 \end{pmatrix}$$

Para que valores de b, la matriz A+B tendrá rango 3, 2,1?

12. Determinar los valores (o valor) de m para que la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & m-1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ -5 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & m-3 & -2 & m+6 \\ 8 & 3 & -2 & m-1 \end{bmatrix}$$

Tenga:
a) Rango 3.
b) Rango 4.

13.

$$Si\, xy\, no\, nulo\;\; y\;\; A=\begin{bmatrix} x & 2x & 3x & 4x \\ -x & 0 & 3x & 4x \\ -x & -2x & 0 & 4x \\ -x & -2x & -3x & 0 \end{bmatrix}$$

$$además\;\; B=\begin{bmatrix} x+(b+2) & x & x & x \\ x & x-(b+2) & x & x \\ y & y & y+(b-1) & y \\ y & y & y & y-(b-1) \end{bmatrix}$$

Para qué valores de b , x e y el rango de la matriz AB es 4,3,2.

14. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\k&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}\text{ y } B=I+AA^t,\text{ donde } adj(A^t)=A=\begin{pmatrix}*&*&k*&*&**&*&*\end{pmatrix}$$

Expresar B^{-1} y B como un producto de matrices elementales fila.

15. a)Sea **A=(a_{ij})** una matriz anti simétrica de orden impar donde **a_{ij}= ij.**

Encontrar la matriz B, si se sabe que :

B(adj A) = cof (cof (2A))

b)Calcular el rango de la matriz

$$M=\begin{bmatrix}a&0&0&b\\b&a&0&0\\0&b&a&0\\0&0&b&a\end{bmatrix}$$

16. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores de $t\in$ R, siendo

$$A=\begin{pmatrix}t&t&0\\2&t+1&t-1\\-2t-1&0&t+3\end{pmatrix}$$

Para que valores de $t\in R$ existe A^{-1}?

17. Probar que la matriz A tiene inversa y calcularla:

$$A=\begin{pmatrix}1&m&0&0\\0&1&m&0\\0&0&1&m\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

18. Sean las matrices A y B, donde a diferente de 3.

$$A=\begin{bmatrix}a&1&0&0\\-3&a-2&2&0\\0&-2&a-4&3\\0&0&-1&a-6\end{bmatrix}\quad y\quad B=\begin{bmatrix}b&1&0&0\\3&b&2&0\\0&2&b&3\\0&0&1&b\end{bmatrix}$$

Para qué valores de a y b rano de AB tomará su máxim valor y su m´nimo valor?

19. Dada la matriz :

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1+a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1+c\end{bmatrix},si\ \ abc\neq 0$$

Determine adj(A) mediante un producto de matrices elementales.

20. Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x & x & x^3 \\ x^3 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 3x & 4x^2 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para qué valor o valores de x la matriz A tiene rango 4;3;2.

21. Determine el valor de verdad de las siguientes prposiciones y justifique su respuesta.

- **a.** La solución del sistema $AX=b$ es $X=A^{-1}b$
- **b.** Si **u y v** son soluciones del sistema $AX=O$,entonces **u+v** también es solucion
- **c.** El sistema $AX=O$,siempre es compatible

22. Supongamos que u_0 es una solución particular del sistema de euaciones lineales $AX=b$

Determinar si es Vo F las siguientes afirmaciones:

i) Si v es una solucion cualquiera del sistema homogéneo asociado $AX=0$,entonces u_0+v es solución de $AX=b$

ii) Si u es una solucion cualquiera del sistema $AX=b$,entonces existe una solución v del sistema homogéneo $AX=0$,talque $u=u_0+v$

23. Resolver y clasificar los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 11x_1-3x_2-7x_3=10 \\ 5x_1+2x_2-4x_3=11 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-3 \\ -4x_1+2x_2+4x_3=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2-x_3-3x_4=6 \\ 4x-2x_2+x_3+2x_4=-6 \\ -6x_1-8x_2+3x_3+8x_4=-18 \\ 3x_1-7x_2+3x_3+7x_4=-18 \end{cases}$$

24. Para que valores de a y b es cocnsistente o compatible el sistema:

$$\begin{cases} 5x-13y=5a-2b \\ x-+2y=a+b-1 \\ 3x-7y=a \\ x+y=b \end{cases}$$

25. Para que valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ 2x+(1-\lambda)y+2z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$$

26. Determine las condiciones sobre a y b para que el sistema:

$$\begin{cases} (a^2+1)x+2y+3z=0 \\ -2(a^2+1)x+2y+3z=6b \\ -2y+(a-4)z \quad =b+1 \end{cases}$$

Tenga: i) solución única ii) infinitas soluciones ii) sea inconsistente

27. Determine los valores de k que hacen que el sistema sea inconsistente

$$\begin{cases} (k^2-2)x+2y+3z=k+1 \\ 2x+2y+3z=3 \\ x+y+z=2 \\ (k^2+1)x+5y+7z=k+6 \end{cases}$$

28. Hallar una relación entre a,b y c para que el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=a \\ 2x+y+z=b \\ 5y-z=c \end{cases}$$

Tenga:i) solución única ii) infinitas soluciones iii) no tenga solución

29. Una compañía siderúrgica produce x toneladas de acero de grado A, y toneladas de acero de grado B y z toneladas de acero de grado C a la semana .La primera semana venderá 38% de acero de grado A , 21% de acero de grado B y 11% de acero de grado C, para un total de 12 229 toneladas,a un fabricante de automóviles .La segunda semana venderá 10% de acero de grado a,53% de grado B y 24% de grado C, para un total de 9 121 toneladas ;y la tercera semana venderá 21% de acero de grado A,46% de graso B y 70% de grado C, para un total de 13369 ton la toneladas :determine los valores de x,y,z.

30. a) El siguiente modelo teórico con el que se pretende representar el mercado de productos y monetario de una economía.

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{1t} & 0 < \alpha_1 < 1 \\
I_t &= \beta_0 + \beta_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + u_{2t} & \beta_1 > 0 \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t & \\
L_t &= \lambda_0 + \lambda_1 Y_t - \lambda_2 r_t + u_{3t} & \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\
M_t &= \delta_0 + \delta_1 Y_t + u_{4t} & \delta_1 > 0 \\
M_t &= L_t &
\end{aligned}
$$

Siendo las variables endógenas I_t, C_t, Y_t, M_t, L_t, r_t.

Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema tenga solución única.

b) Una compañía produce tres tipos de maletines: económico, junior y ejecutivo. Cada uno requiere de cuero, plástico y tela. Un maletín económico requiere de tres unidades de cuero, cuatro de plástico y dos de tela; uno de tipo junior requiere cuatro unidades de cuero, dos de plástico y seis de tela; mientras que uno de tipo ejecutivo requiere cinco unidades de cuero, una de plástico y nueve de tela. Si se disponen de 190 unidades de cuero, 90 de plástico y 290 de tela para la fabricación de los maletines; determine el número de maletines que serán producidos, indicando todas las posibilidades.Un fabricante compra grandes cantidades de ciertos repuestos para máquinas.

El Profesor